Taller básico de Geometría (9/11/18):

Resultados básicos de Geometría plana: se suponen conocidos el teorema de Thales y las semejanzas de triángulos:

Dos triángulos son semejantes si tienen los ángulos correspondientes iguales o si sus lados son proporcionales entre sí. El teorema de Tales afirma que:

Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.

Trigonometría básica: definiciones de seno, coseno y tangente de un ángulo. Propiedades básicas

El triángulo ABC es un triángulo rectángulo en C; lo usaremos para definir las razones seno, coseno y tangente, del ángulo correspondiente al vértice A:

El seno (abreviado como *sen*, o *sin* por llamarse "sĭnus" en latín) es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

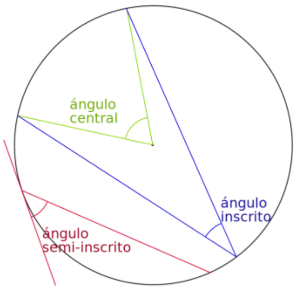
El coseno (abreviado como *cos*) es la razón entre el cateto adyacente o contiguo al ángulo y la hipotenusa.

La tangente (abreviado como *tan* o *tg*) es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente.

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \ \cos A = \frac{AC}{AB}, \ \tan A = \frac{BC}{AC}$$

Del teorema de Pitágoras se obtiene que $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, sin 45º = cos 45º $= \frac{\sqrt{2}}{2}$, sin 30º = cos 60º = ½, sin 60º = cos 30º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Razones trigonométricas de 90º, 120º, 135º, 150º, …

Teorema del ángulo inscrito (o semi-inscrito).- *Un ángulo inscrito (o semi-inscrito) en un círculo mide la mitad del arco que abarca (o ángulo central).*



Teorema del ángulo interior.- *Un ángulo interior en un círculo mide la semisuma de los dos arcos que abarca.*

Teorema del ángulo exterior.- *Un ángulo exterior de un círculo mide la semidiferencia de los dos arcos que abarca.*

Casos de ángulos tangentes.

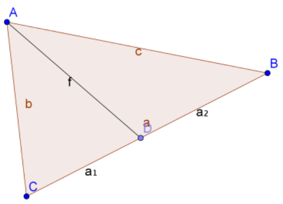
Mediatriz de un triángulo. Existencia del circuncentro. Caso del triángulo rectángulo.

Problema Fase Local OME 2008 (nº 5). *Dada una circunferencia y dos puntos P y Q en su interior, inscribir un triángulo rectángulo cuyos catetos pasen por P y Q respectivamente. ¿Para qué posiciones de P y Q el problema no tiene solución?*

Teorema de la altura.- *En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa es media proporcional con las partes en las que divide a ésta.*

Teorema del Seno.- *En todo triángulo ABC se verifica que los lados son proporcionales a los senos de los ángulos correspondientes. La proporción es el diámetro de la circunferencia circunscrita*: $\frac{a}{senA}=\frac{b}{senB}=\frac{c}{senC}=2R$

Teorema de la bisectriz (interior).- *La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados del ángulo:*



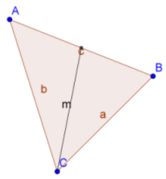
$$\frac{a_1}{b}=\frac{a_2}{c}$$

Teorema del Coseno.- *En todo triángulo ABC de lados a, b, c se verifica que:*

$$a^2=b^2+c^2-2bc\ \cos\hat{A}$$

Teorema de la mediana (o de Apolonio).- *En un triángulo ABC de lados a, b, c se traza la mediana desde C, de longitud m. Se verifica que:*

$$a^2+b^2=\frac{1}{2}c^2+2m^2$$

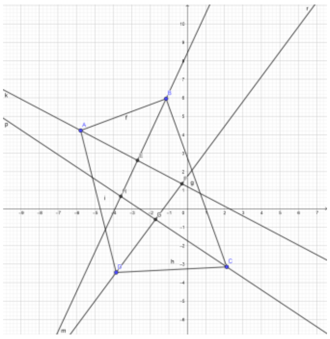


Movimientos del plano. Homotecias.

Bisectrices de un triángulo. Existencia del incentro.

Problema 3 (*Fase local 2006). En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior CD. Se sabe que el centro del círculo inscrito en el triángulo BCD coincide con el centro del círculo circunscrito del triángulo ABC. Calcular los ángulos del triángulo ABC.*

Problema. *En la siguiente figura están trazadas las bisectrices de los ángulos interiores del cuadrilátero ABCD, las cuales se intersectan en los puntos E, F, G y H, como se muestra en la figura. Demuestra que el cuadrilátero EFGH es cíclico.*



Teorema. En un cuadrilátero ABCD circunscrito a una circunferencia, se verifica que AB + CD = BC + AD.

Teorema de Ptolomeo. En un cuadrilátero cíclico (inscrito en una circunferencia) se verifica que el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos: AB.CD + AD.BC = AC.BD

Problema. En un pentágono regular encontrar la razón entre la diagonal y el lado.

Problema nº 2 Olimpiada Iberoamericana 2018. *Sea ABC un triángulo tal que* $\widehat{BAC} = 90°$ *y BA = CA. Sea M el punto medio de BC. Un punto* $D \neq A$ *es elegido en la semicircunferencia de diámetro BC que contiene a A. La circunferencia circunscrita al triángulo DAM intersecta a las rectas DB y DC en los puntos E y F, respectivamente. Demostrar que BE = CF.*

Problema Fase Local OME 2008 (nº 2). *En un cuadrilátero convexo se trazan las perpendiculares desde cada vértice a la diagonal que no pasa por él. Demuestra que los cuatro puntos de intersección de cada perpendicular con su correspondiente diagonal forman un cuadrilátero semejante al dado.*

Alturas de un triángulo. Existencia del ortocentro. Recta de Euler.

Problema. *Sean AD, BE y CF las alturas de un triángulo ABC y H su punto de intersección. Demuestra que los cuadriláteros AEHF, CEHD, BDHF, BCEF, ACDF y ABDE son cíclicos.*

Fórmulas del área de un triángulo, conocidos:

Base y altura

Dos lados y el ángulo que abarcan

Lados (fórmula de Herón). Lados y circunradio

Semiperímetro e inradio

Coordenadas de los vértices.

Curso 18/19	Nivel Básico		Nivel Avanzado	
26-oct	Manolo Delgado	Polinomios	Enrique Naranjo	Geometría
09-nov	Ramón Piedra	Geometría	Jaime Benabent	Combinatoria
23-nov	Antonio Rojas		Alberto y Ulises	Teoría de Números
30-nov	Rafael Espínola		José Manuel y Javier	Álgebra
14-dic	Antonio Pérez		Enrique y Maite	General
21-dic	Fernando Mayoral		Jaime Benabent	General
11-ene	Juan Glez-Meneses			